Eduard Montgomery Meira Costa

Eletromagnetismo

Teoria, Exercícios Resolvidos e Experimentos Práticos

EDITORA CIÊNCIA MODERNA

Aos meus filhos e minha esposa.
Ao Deus Criador.
Aos meus protetores espirituais.

DEDICATÓRIA

Dedico a toda minha família, especialmente aos meus filhos e minha esposa.

Ao amigo Professor Fernando Simões de Sant'Anna.

A todos os amigos e ex-alunos que souberam buscar entender os princípios do eletromagnetismo, e que um dia serão (ou que já são) engenheiros eletricistas.

Aos que sabem respeitar e detêm as virtudes da simplicidade, humildade e sinceridade, e aliado a essas virtudes, buscam no conhecimento a chave para a liberdade.

PREFÁCIO

Eletromagnetismo é uma das principais teorias necessárias ao entendimento da matéria e suas propriedades. Além do mais, é uma das principais bases para físicos e engenheiros eletricistas, de que estes últimos muito necessitam para entender os fenômenos que regem todas as teorias voltadas à área, como circuitos, transmissão e recepção de sinais e potência, correntes, resistências, capacitâncias, indutâncias, entre tantas outras.

Baseado no conhecimento das quatro equações de Maxwell, o eletromagnetismo aparenta ser complicado, devido à necessidade do prévio conhecimento da física, do cálculo diferencial e integral e da álgebra vetorial. Todos os conceitos do eletromagnetismo são amplamente utilizados em toda a área tecnológica, desde os componentes eletrônicos, como os resistores, capacitores, indutores, diodos, LEDs, transistores, etc., até suas grandes aplicações, como dínamos, geradores de corrente alternada, LASERs, MASERs, televisores, rádios, computadores, medidores, radares, entre tantos outros. Assim, é de grande necessidade o amplo conhecimento desta teoria para aplicar a novas pesquisas e tecnologias. Para tanto, este livro está baseado em teorias diretas, além de vários exemplos resolvidos e discutidos detalhadamente, no porquê da utilização específica de cada equação e de cada teoria, além de mostrar quando se devem utilizar aproximações para as aplicações reais. Para completar o arcabouço teórico, vários experimentos práticos para montagem, verificação e comprovação da teoria estudada são apresentados. Com a realização destes experimentos, o estudante terá como comprovar a teoria, e adaptar-se a aplicá-la ao cotidiano da engenharia, encontrando soluções práticas para problemas reais, bem como adquirir maturidade para desenvolver idéias inovadoras com os fenômenos eletromagnéticos.

Este livro é ricamente ilustrado, trabalhando desde a base da Lei de Coulomb e as cargas elétricas, passando pelos fundamentos das quatro equações de Maxwell (o que inclui campo elétrico e campo magnético, e todas as suas características e aplicações), até apresentar os campos variantes no tempo e as ondas eletromagnéticas conhecidas como ondas planas uniformes.

Devido à sua estrutura de exemplos resolvidos passo a passo e aplicações experimentais, a teoria é apresentada de forma suficiente e direta. Para o estudante que deseja entender mais detalhes a respeito da formulação que baseia cada equação da teoria e mais experimentos a respeito desta, deve buscar as bibliografias contidas na Seção de Referências.

Eduard Montgomery Meira Costa,
D.Sc. Eng. Elétrica.

“A inveja determina inferioridade, pois quem me inveja,
apenas me mostra claramente que sou superior.”
Eduard M. M. Costa

“A história tem demonstrado que os mais notáveis vencedores normalmente
encontraram obstáculos dolorosos antes de triunfarem. Venceram porque
se negaram a serem desencorajados por suas derrotas.”
B. C. Forbes

SUMÁRIO

Capítulo 1

Cargas Elétricas, Lei de Coulomb e Campo Elétrico

Neste capítulo são apresentados os conceitos de carga elétrica, Lei de Coulomb e campo elétrico de várias distribuições de cargas, além de exemplos de experimentos que podem ser desenvolvidos para conceber na prática os princípios relativos às suas aplicações reais.

1.1 Cargas Elétricas

O conceito de carga elétrica é uma propriedade física fundamental que determina algumas das interações eletromagnéticas da matéria. Pode-se conceber a carga elétrica como uma quantidade de energia (ou capacidade de realizar trabalho) concentrada em um ponto do espaço (volume infinitesimal).

As cargas elétricas são concebidas em dois tipos, que são as cargas elétricas positivas e as cargas elétricas negativas. Todas as cargas elétricas são baseadas na carga fundamental (ou carga elementar) que é o elétron. O elétron tem como carga o valor de

$$e = -1{,}6 \times 10^{-19}\ C,$$

em que a unidade C é o *Coulomb*, que provém do nome do pesquisador Charles Coulomb, quem primeiro estudou os fenômenos destas e suas interações físicas, como campo elétrico e forças entre cargas. Todas as cargas elétricas são múltiplos desta carga elementar. O sinal negativo é definido por sua carga ser contrária à carga do próton.

O elétron tem massa

$$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\ kg.$$

Quando várias cargas elétricas elementares atravessam uma seção reta de um fio em um determinado tempo, define-se uma corrente elétrica I, que tem unidade de *Ampère* [A] que é igual à *Coulomb/segundo* [C/s]. Concebe-se a corrente elétrica por meio dos elétrons em movimento, desde que estes são os elementos que podem se mover de uma forma mais fácil nos átomos (elementos nas camadas eletrônicas), através da aplicação de alguma forma de energia, como os campos elétricos, as forças de atrito, temperatura, etc. Assim, necessariamente, são os elétrons em movimento que geram raios e correntes elétricas, pois é impossível se fazer uma corrente de cargas positivas (pois seria a desestruturação de núcleos atômicos).

As cargas elétricas exibem interações físicas com a matéria através dos campos gerados por elas quando estáticas (campos elétricos) e em movimento contínuo (campos magnéticos), sendo estudadas como partículas, ou na forma de campos eletromagnéticos variantes quando em variação de suas quantidades, sendo estudadas como ondas. Daí, uma das formalizações que permitem entender a dualidade onda-partícula.

Quando várias cargas se encontram distribuídas em uma região, determinam-se densidades de cargas relativas a estas distribuições. Estas densidades podem ser descritas como:

- Densidade linear de carga: ρ_L [*C/m*];
- Densidade superficial de carga: ρ_S [*C/m²*];
- Densidade volumétrica de carga: ρ [*C/m³*],

em que o valor total da carga é a soma de toda a carga distribuída, respectivamente:

$$Q = \int \rho_L dL;$$
$$Q = \int_S \rho_S dS;$$
$$Q = \int_{vol} \rho dv.$$

Se as cargas são distribuídas uniformemente na região (ρ_L, ρ_S ou ρ constantes), tem-se $Q = \rho_L L$, $Q = \rho_S S$ e $Q = \rho v$, respectivamente. Caso contrário, deve-se resolver as integrais.

Exemplo 1.1: Considerando as distribuições de cargas dadas a seguir, em coordenadas cartesianas, calcular os valores das cargas totais na região definida:

a) $\rho_L = 3 \times 10^{-9} C/m$ no eixo *z*, na região $-3 \leq z \leq 8{,}3$ *cm*;
b) $\rho_L = -3{,}45 \times 10^{-6} y^2 x C/m$ paralelo ao eixo *y*, na região $-4{,}35 \leq y \leq 25{,}42$ *mm*, passando pelo ponto $x = 3$ *cm*;
c) $\rho_S = 4{,}2 \times 10^{-7} C/m^2$ na região $5{,}35 \leq x \leq 7{,}42$ *m* e $-4{,}2 \leq z \leq -1{,}35$ *cm*, sendo esta região um plano passando pelo ponto $y = 51$ *mm*;

d) $\rho_S = \dfrac{6{,}78\times10^{-11}(y^2+x)z}{(z^2-1)} C/m^2$ na região $2{,}52 \le y \le 2{,}84$ *m* e $-1{,}2 \le z \le -0{,}23$ *cm*, sendo esta região um plano passando pelo ponto $x = 6{,}5$ *cm*;

e) $\rho = 2{,}3\times10^{-5} C/m^3$ na região $-2{,}3 \le x \le 6{,}32$ *m*, $4{,}43 \le y \le 15{,}33$ *mm* e $-1{,}32 \le z \le 18{,}2$ *cm*;

f) $\rho = -1{,}43\times10^{-8}\left(\dfrac{z^2\cos(x)}{y^3} + \dfrac{x^2 y}{x-1}\right) C/m^3$ de um cubo centrado na origem de lados $l = 25{,}4$ *cm*.

A solução deste problema se dá pelas equações citadas anteriormente, depois de sua identificação. Assim, tem-se:

a) A distribuição de cargas é uniforme (ρ é constante). Logo, encontra-se que a carga total que está distribuída na linha é:

$Q = \rho_L L = 3 \times 10^{-9} \times (8{,}3 \times 10^{-2} - (-3 \times 10^{-2})) = 33{,}9 \times 10^{-11}\ C$,

desde que o comprimento da linha onde a carga está distribuída é o valor maior subtraído do valor menor e o mesmo está dado em centímetros (a unidade *C* é do sistema *MKS*, logo, tem de ter os valores de comprimento dados em metros);

b) No caso deste problema, a carga se encontra paralela ao eixo *y*, e varia com a posição *x* e com o próprio *y*. Neste caso, *x* é uma posição fixa, cujo valor é $x = 3 \times 10^{-2}$ *m*, e como a carga não varia com *z*, o valor onde a linha se encontra ($z = 0$) não interfere no cálculo da carga. Entretanto, em relação a *y*, o valor da carga varia ponto a ponto, necessitando integrar ρ_L. Assim, tem-se:

$$Q = -3{,}45\times10^{-6}\times3\times10^{-2}\int_{-4{,}35\times10^{-3}}^{25{,}42\times10^{-3}} y^2 dy = -10{,}35\times10^{-8}\left.\frac{y^3}{3}\right|_{-4{,}35\times10^{-3}}^{25{,}42\times10^{-3}}$$

$$= -3{,}45\times10^{-8}((25{,}42\times10^{-3})^3 - (-4{,}35\times10^{-3})^3) = -5{,}6953\times10^{-13}\,C,$$

pois os valores de *y* estão dados em milímetros.

c) Identificando o problema, verifica-se que a carga está distribuída em uma superfície no plano *xz*, sendo o valor de *z* dado em *cm*, o que equivale a 10^{-2} metros. Como a carga está distribuída uniformemente (constante em toda a região), tem-se o valor total da carga dada como:

$Q = \rho_S S = 4{,}2 \times 10^{-7} \times (7{,}42 - 5{,}35) \times (-1{,}35 \times 10^{-2} - (-4{,}2 \times 10^{-2})) = 2{,}478 \times 10^{-8}\ C$

Observe que o valor da área do retângulo é a multiplicação do comprimento total de um lado (diferença entre o valor final de x e seu valor inicial) com o comprimento total do outro lado (diferença entre o valor final de z e seu valor inicial);

d) Aqui é necessário integrar na superfície yz com os limites definidos e transformados para metros (caso específico da variável z que está em centímetros). Como a função depende de x e a superfície a ser integrada é yz, então o valor de x é constante e pode ser substituído com o valor dado: $x = 6{,}5 \times 10^{-2}\ m$. Assim, tem-se:

$$Q = \int_S \rho_S dS = 6{,}78 \times 10^{-11} \int_{-1{,}2\times10^{-2}}^{-0{,}23\times10^{-2}} \int_{2{,}52}^{2{,}84} \frac{(y^2 + 6{,}5\times10^{-2})z}{(z^2-1)} dydz$$

$$= 6{,}78\times10^{-11}\left(\frac{y^3}{3} + 6{,}5\times10^{-2}y\right|_{2{,}52}^{2{,}84} \int_{-1{,}2\times10^{-2}}^{-0{,}23\times10^{-2}} \frac{z}{(z^2-1)}dz$$

$$= 1{,}616\times10^{-10}\int_{-1{,}2\times10^{-2}}^{-0{,}23\times10^{-2}} \frac{z}{(z^2-1)}dz$$

Esta integral em z pode ser solucionada utilizando o artifício de somar 1 – 1 no numerador para dividir a equação na forma:

$$\frac{z+1-1}{z^2-1} = \frac{z-1}{(z-1)(z+1)} + \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z+1)} + \frac{1}{z^2-1}.$$

Entretanto, a última parte da equação pode ser dividida novamente em termos de frações parciais como:

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1},$$

donde se encontram, solucionando esta equação, os valores $A = -1/2$ e $B = 1/2$, ficando a integral fácil de resolver, pois:

$$\frac{z}{z^2-1} = \frac{z+1-1}{z^2-1} = \frac{1}{(z+1)} + \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z+1)} - \frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{2(z-1)} = \frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{2(z-1)}.$$

Daí, tem-se

$$Q = 1{,}616\times10^{-10}\int_{-1{,}2\times10^{-2}}^{-0{,}23\times10^{-2}}\left(\frac{1}{2(z+1)}+\frac{1}{2(z-1)}\right)dz$$
$$= \frac{1{,}616\times10^{-10}}{2}\left(\ln|z+1|+\ln|z-1|\right)\Big|_{-1{,}2\times10^{-2}}^{-0{,}23\times10^{-2}}$$
$$= 8{,}08\times10^{-11}\left((-2{,}30265\times10^{-3}+2{,}29736\times10^{-3})-(-0{,}012073+0{,}0119286)\right)$$
$$= 1{,}12424\times10^{-14}\,C$$

e) Para encontrar a carga aqui, vê-se que a distribuição é volumétrica e uniforme em toda a região definida, que é um paralelepípedo de lados l_x = 6,32 – (–2,3) = 8,62 m, l_y =15,33 x 10^{-3} – 4,43 x 10^{-3} = 10,9 x 10^{-3} m e l_z =18,2 x 10^{-2} – (–1,32 x 10^{-2}) = 19,52 x 10^{-2} m. Calculando o valor da carga, tem-se diretamente:

$Q = \rho v$ = 2,3 x 10^{-5} x 8,62 x 10,9 x 10^{-3} x 19,52 x 10^{-2} = 4,21834 x 10^{-7} C.

f) Neste problema, vê-se que a carga está distribuída em um volume, e essa distribuição depende de todas as coordenadas. Além do mais, como a mesma está centralizada na origem e são dados os comprimentos totais dos lados, deve-se integrar no volume considerando a metade de cada comprimento iniciando no valor negativo do eixo até o mesmo valor positivo, convertido para metros. Ou seja, deve-se considerar a região como sendo: –12,52 x $10^{-2} \leq x \leq$ 12,52 x 10^{-2}, –12,52 x $10^{-2} \leq y \leq$ 12,52 x 10^{-2}, –12,52 x $10^{-2} \leq z \leq$ 12,52 x 10^{-2}. Dessa forma, tem-se:

$$Q = \int_{vol}\rho dv = -1{,}43\times10^{-8}\int_{-12{,}52\times10^{-2}}^{12{,}52\times10^{-2}}\int_{-12{,}52\times10^{-2}}^{12{,}52\times10^{-2}}\int_{-12{,}52\times10^{-2}}^{12{,}52\times10^{-2}}\left(\frac{z^2\cos(x)}{y^3}+\frac{x^2y}{x-1}\right)dxdydz\,.$$

Observando esta integral, o valor das duas parcelas da distribuição volumétrica da carga depende unicamente de uma potência ímpar de y, o que zerará esta parte quando integrar, pois a distribuição na parte negativa (valor inicial do eixo y) é igual à da parte positiva (valor final do eixo y). Ou seja, fazendo:

$$Q = -1{,}43\times10^{-8}\int_{-12{,}52\times10^{-2}}^{12{,}52\times10^{-2}}\int_{-12{,}52\times10^{-2}}^{12{,}52\times10^{-2}}\int_{-12{,}52\times10^{-2}}^{12{,}52\times10^{-2}}\left(\frac{z^2\cos(x)}{y^3}+\frac{x^2y}{x-1}\right)dydxdz\,,$$

quando se resolve a integral de y, tem-se:

$$\int_{-12,52\times10^{-2}}^{12,52\times10^{-2}}\left(\frac{z^2\cos(x)}{y^3}+\frac{x^2y}{x-1}\right)dy = z^2\cos(x)\left(-\frac{1}{2y^2}\right|_{-12,52\times10^{-2}}^{12,52\times10^{-2}}+\frac{x^2}{x-1}\left(\frac{y^2}{2}\right|_{-12,52\times10^{-2}}^{12,52\times10^{-2}}=0,$$

o que reduz o trabalho de integração, pois se encontra facilmente:

$$Q=-1,43\times10^{-8}\int_{-12,52\times10^{-2}}^{12,52\times10^{-2}}\int_{-12,52\times10^{-2}}^{12,52\times10^{-2}}\left(0\times z^2\cos(x)+0\times\frac{x^2}{x-1}\right)dxdz = 0C.$$

Em outros termos, a carga total contida no volume na parte negativa do eixo y é igual em módulo e contrária em sinal à carga contida no volume na parte positiva deste eixo, o que faz o conjunto destas duas partes ter carga líquida igual a zero. O mesmo resultado é encontrado resolvendo primeiro em qualquer outra coordenada, entretanto ter-se-á mais trabalho na integração.

Exemplo 1.2: Considerando as distribuições de cargas dadas a seguir, em coordenadas cilíndricas, calcular os valores das cargas totais na região definida:

a) $\rho_L=-2,3\times10^{-6}\,C/m$ distribuída em um anel de raio $r = 5\ cm$;
b) $\rho_L=4,32\times10^{-7}r^2z\,C/m$ distribuída num arco $35° \leq \phi \leq 125°$, fixa em $z = 5\ cm$ e com $r = 2\ dm$;
c) $\rho_S=3,4\times10^{-7}\,C/m^2$ na superfície $r = 74,3\ cm$, $45,2° \leq \phi \leq 105,35°$ e $-10,5 \leq z \leq 15,2\ cm$;
d) $\rho_S=\dfrac{5,43\times10^{-5}r^2\cos\phi}{z^2}C/m^2$ na superfície $1,35 \leq r \leq 4,33\ m$, $33,2° \leq \phi \leq 63,35°$ e $z = 1,3\ cm$;
e) $\rho=5,2\times10^{-4}\,C/m^3$ na região $3,2 \leq r \leq 5,3\ m$, $23,12° \leq \phi \leq 231,34°$ e $-4,37 \leq z \leq 8,12\ cm$;
f) $\rho=-2,36\times10^{-9}\left(\dfrac{r\text{sen}\phi}{z}-\dfrac{z^2\phi}{r-1}\right)C/m^3$ de um cilindro centrado na origem de raio $r = 88\ cm$ e altura $h = 12,6\ cm$.

A solução deste problema exige a utilização dos mesmos conceitos de cálculo de cargas e a utilização das coordenadas cilíndricas. Assim, tem-se: